

# 1 Curriculum Vitæ

## 1.1 État civil

Nom : Aurelio SPADOTTO  
Date et lieu de naissance : 9 juillet 1997, à Milano (Italie)  
Nationalité : Italienne  
Diplôme : Doctorat en Mathématiques et Modélisation

## 1.2 Situation Professionnelle

depuis 2025



**Post-doctorat**

*Université de Montpellier*  
*Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck (IMAG, UMR 5149)*

Thématique : *Développement de schémas numériques hybrides pour les systèmes de Friedrichs*

Financement : ERC Synergy NEMESIS, project number 101115663

2024 – 2025



**ATER**

*Université de Montpellier*

## 1.3 Formation

2021 – 2025



**Doctorat en Mathématiques et Modélisation**

*Université de Montpellier*  
*Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck (IMAG, UMR 5149)*

Thèse : *Numerical Simulation of Red Blood Cell Electrodeformation*

Directeurs : Simon MENDEZ  
Daniele DI PIETRO

Rapporteurs : Lisl WEYNANS  
Alexei LOZINSKI

President du jury : Vincent MOUREAU

Autres membres : Jérôme DRONIOU

Financement : Région Occitanie, Allocation doctorale 2021

2019 – 2021



**Master en "Mathematical Engineering"- filière Calcul Scientifique**

*Politecnico di Milano*

2016 – 2019



**Licence en Ingénierie Mathématique**

*Politecnico di Milano*

## 1.4 Compétences informatiques

- **Langages** : Fortran 90 (calcul scientifique), C++ (calcul scientifique), Python (calcul scientifique et visualisation de données);
- **DevOps** : make, CMake, git;
- **Visualization 3D** : paraview;
- **Rédaction** :  $\text{\LaTeX}$ .

## 2 Publications

### 2.1 Articles publiés dans des revues à comité de lecture

- DI PIETRO D., MENDEZ S. AND SPADOTTO A.  
*A discrete de Rham discretization of interface diffusion problems with application to the Leaky Dielectric Model.*  
Journal of Computational Physics, Vol. 530 (2025), pg. 113920  
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.113920>  
<https://arxiv.org/abs/2409.1/5042>

### 2.2 Articles soumis disponibles en preprint

- DI PIETRO D. AND SPADOTTO A.  
*Hybrid Methods for Friedrichs Systems with Application to Scalar and Vector Diffusion-Advection Problems.*  
<https://arxiv.org/abs/2602.10890>(2026).

### 2.3 Articles en cours de rédaction

- DI PIETRO D., MENDEZ S. AND SPADOTTO A.  
*Numerical simulation of biological capsules based on polygonal meshes fitted along the membrane.*
- DI PIETRO D. AND SPADOTTO A.  
*Hybrid Methods for 2-field Friedrichs Systems.*

### 3 Participations à Événements

#### 3.1 Présentations invitées lors de congrès et conférences scientifiques

- 2025 | Int. Conf. on Comput. Methods for Coupled Problems in Science and Eng., **Villasimius** ([slides](#))
- 2024 | POEMS24 : Polytopal Element Methods in Mathematics and Engineering, **Paris** ([poster](#))  
CJC-MA2024 : Congrès des Jeunes Chercheurs.e.s en Mathématiques Appliquées, **Lyon** ([poster](#))  
JMBS, Journées Maths Bio Santé, **Nantes** ([slides](#))  
ECFD7 : Extreme CFD Workshop, 7th edition, **Merville-Franceville** ([compte rendu](#), [sub-project N6](#))
- 2023 | Dynamics of Capsules, Vesicles and Cells in Flow **Compiègne** ([program](#))  
ECFD6 : Extreme CFD Workshop, 6th edition **Merville-Franceville** ([compte rendu](#), [sub-project 2](#))

#### 3.2 Séminaires et groupes de travail

- 2026 | Séminaire de mathématiques appliquées, **Nantes** ([slides](#))
- 2025 | Séminaire de l'équipe ACSIOM (EDP, analyse numérique) de l'IMAG, **Montpellier** ([slides](#))  
Groupe de travail NEMESIS (analyse numérique) de l'IMAG, **Montpellier** ([slides](#))

#### 3.3 Organisation d'événements et gestion de séminaires

- 2026 | Membre du comité organisateur du workshop "Towards Polytopal meshes in GMSH", **Montpellier** ([programme](#))
- 2023-24 | Co-organisation du Séminaire des doctorants de l'IMAG, **Montpellier** ([programme](#))

## 4 Activité d'enseignement

Les enseignements détaillés dans la suite ont été effectués auprès de la Faculté de Sciences de l'Université de Montpellier, parmi ceux dispensés par le Département de Mathématiques. Ils ont été réalisés en partie à travers des missions complémentaires pendant le doctorat, et en partie avec un ATER.

	U.E. (TD)	Niveau	Heures
2024/25	Raisonnement Scientifique	L1 Biologie	75h
	Outils Mathématiques 1	L1 PCSI	90h
	Outils Mathématiques 2	L1 PCSI	27h
		***** TOT *****	<b>192h</b>
2023/24	Méthodes Calculatoires	L1 Biologie	16h
	Outils Mathématiques 1	L1 PCSI	16h
		***** TOT *****	<b>32h</b>
2022/23	Méthodes Calculatoires	L1 Biologie	32h
		***** TOT *****	<b>32h</b>

### 4.1 Contenu des cours

- **Outils Mathématiques 1 (L1 Physique/Chimie/Sciences de l'Ingénieur (PCSI), TD, 106 heures totales)** : éléments de théorie des ensembles et logique (énoncés, connecteurs logiques, quantificateurs, raisonnement par l'absurde); topologie des ensembles dans  $\mathbb{R}$ ; vocabulaire fondamental sur le concept de fonction; analyse des fonctions d'une variable réelle : limites, continuité, dérivation; développements limités et application au calcul de limites; optimisation de fonctions d'une variable réelle; intégration à la Riemann, théorème fondamental de l'analyse et techniques standard pour le calcul d'intégrales; introduction aux équations différentielles ordinaires du premier ordre : séparation de variables, ODEs linéaires à coefficients constants, problème de Cauchy, exemples de modélisation provenant de la chimie et de l'écologie.
- **Raisonnement Scientifique (L1 Biologie, TD, 90 heures totales)** : éléments de théorie des ensembles et modélisation d'une expérience aléatoire; calcul de probabilité pour expériences simples, éléments de combinatoire; événements indépendants, probabilité conditionnelle, théorème de Bayes; variables aléatoires : loi, valeur attendue, variance, médiane; lois de probabilité sur ensembles finis : uniforme, Bernoulli, binomiale; loi de probabilité sur ensembles dénombrables : géométrique, Poisson;
- **Méthodes Calculatoires (L1 Biologie, TD, 32 heures totales)** : rappels sur polynômes, fonction exponentielle et logarithme; méthode des moindres carrés et régression linéaire; reconnaissance de loi et estimation de paramètres à l'aide de repères logarithmiques et semi-logarithmiques; éléments de calcul infinitésimal et différentiel pour fonctions d'une variable réelle;
- **Outils Mathématiques 2 (L1 Physique/Chimie/Sciences de l'Ingénieur (PCSI), TD, 27 heures totales)** : fonctions à variables en  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  : domaine de définition, courbes de niveau; différentiation à plusieurs variables, dérivées partielles, gradient; formes différentielles fermées, exactes, recherche d'un potentiel; paramétrisation de courbes et intégration sur courbes.

## 5 Activité de recherche

Mes travaux se sont jusqu'à présent développés sur deux axes principaux et fondamentalement indépendants. Le premier est l'amélioration d'un **simulateur numérique de dynamique de globules rouges** en prenant en compte l'action d'un champ électrique. Cette partie des travaux s'est déroulée pour la plupart pendant les années de préparation du doctorat. Le deuxième est la conception et l'analyse d'un **schéma numérique hybride, d'ordre arbitraire et supportant des maillages polytopaux** pour des systèmes d'EDP du premier ordre satisfaisant des hypothèses de symétrie et positivité (**systèmes de Friedrichs**). Cette deuxième ligne de recherche fait le sujet du post-doctorat actuellement en cours. Il est possible d'identifier quatre modules qui résument ces travaux de recherche, chacun détaillé dans l'une des sections qui suivent. Pour chacun, on décrit la motivation, les détails du contexte si nécessaire, ainsi que les résultats obtenus. Nous esquissons également des perspectives de développement futur. Les sections que je présenterais pour une audition seraient la section 5.2 et la section 5.4.

### 5.1 Implémentation de la méthode GFM dans YALES2BIO

#### Motivation

Le point de départ est le simulateur de tissus biologiques **YALESBIO**, développé à l'Institut Montpellierain Alexander Grothendieck (IMAG) et basé sur le kernel **YALES2**, développé au Complexe de Recherche Interprofessionnel en Aérothermochimie (CORIA, Rouen). Le but du projet a consisté en l'ajout dans le simulateur d'un module pour la représentation de l'effet d'un champ électrique sur la membrane élastique d'un globule rouge. On est parti d'un modèle d'électrodéformation consolidé et on a recherché la méthode numérique existante la plus adaptée pour coupler pour la première fois une **simulation Frontière Immersée** de globules rouges avec la discretisation d'un potentiel électrique discontinu. Cette recherche est inspirée, entre autres, par des **applications en ingénierie biomédicale**, relatives à la conception d'analyseurs sanguins automatiques basés sur le principe de Coulter (illustré en figure 1).

#### Contexte

Dans **YALES2BIO**, la simulation de l'écoulement autour de la cellule est basée sur la méthode des Volumes Finis pour la solution des équations de Navier-Stokes sur un maillage tridimensionnel de la géométrie considérée. La discrétisation du globule rouge prend en considération son extension spatiale et les propriétés mécaniques de sa membrane. En particulier, une cellule est représentée en introduisant une triangulation de sa surface. Les communications entre le volume occupé par l'écoulement et la membrane de la cellule sont implémentées selon les principes de la méthode des Frontières Immersées [**peskin\_immersed\_2002**]. Le modèle d'interaction entre cellule et champ électrique retenu pour le projet est basé sur le modèle Leaky Dielectric [**saville\_electrohydrodynamics\_1997**], consolidé en littérature pour la description de systèmes assimilables aux globules rouges. Au cœur du modèle on introduit une variable supplémentaire, représentant le potentiel électrique dans le volume considéré. Le potentiel électrique respecte des conditions de transmission à l'interface entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule, et sa détermination prend la forme d'un **problème elliptique d'interface** : dans un domaine  $\Omega$ , partagé en deux sous-domaines  $\Omega_{\text{int}}$ ,  $\Omega_{\text{ext}}$  par une interface  $\Gamma$  de normale externe  $n_\Gamma$ , déterminer  $u : \Omega_{\text{int}} \cup \Omega_{\text{ext}} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant

$$-\nabla \cdot (\sigma_\bullet \nabla u_\bullet) = f \quad \text{in } \Omega_\bullet, \bullet \in \{\text{int}, \text{ext}\}, \quad (1a)$$

$$[u]_\Gamma = J_\Gamma \quad \text{on } \Gamma, \quad (1b)$$

$$[\sigma \nabla u]_\Gamma \cdot n_\Gamma = \Phi_\Gamma \quad \text{on } \Gamma, \quad (1c)$$

$$u_{\text{ext}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (1d)$$

où les crochets  $[\cdot]_\Gamma$  représentent le saut à travers  $\Gamma$ ,  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  est un coefficient de conductivité constant sous chaque sous-domaine et discontinu à travers  $\Gamma$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $J_\Gamma, \Phi_\Gamma \in L^2(\Gamma)$  expriment des termes sources.

#### Résultats

Le défi principal du projet a été l'identification d'une stratégie numérique pour la solution du problème (1) adaptée à l'infrastructure de calcul de **YALES2BIO**, caractérisée par une interface non adaptée à la discrétisation du domaine de calcul. Le résultat principal a été l'implémentation de la **méthode Ghost Fluid Method** [**fedkiw\_non-oscillatory\_1999**], consolidée pour la simulation des écoulements multiphasiques. À l'issue du projet, **YALES2BIO** présente un nouveau module implémentant la méthode, permettant de représenter la

discontinuité de potentiel à travers la membrane (figure 2). Le module est compatible avec les procédures de parallélisation déjà présentes en YALES2BIO. Les résultats de ce projet sont détaillés dans le mémoire de thèse (<https://theses.hal.science/tel-05305250v1>)

### Prospectives

La suite de ce projet a été le développement des approches polytopales décrites dans les sections 5.2 et 5.3. Ces dernières ont été pour l'instant implémentées en 2D sur un code Python fondamentalement séquentiel et non optimisé. L'intégration de ces techniques dans une plateforme d'échelle industrielle comme YALES2BIO permettrait de configurer des tests 3D sur des configurations d'intérêt appliqué, telle celle d'un analyseur sanguin. Il s'agit d'un projet de grand intérêt, qui pourrait bien profiter de la collaboration avec un ingénieur de recherche spécialisé en calcul scientifique haute performance.

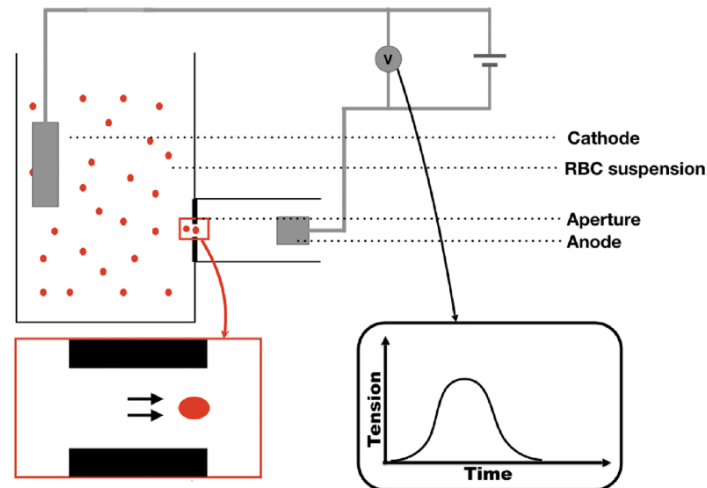
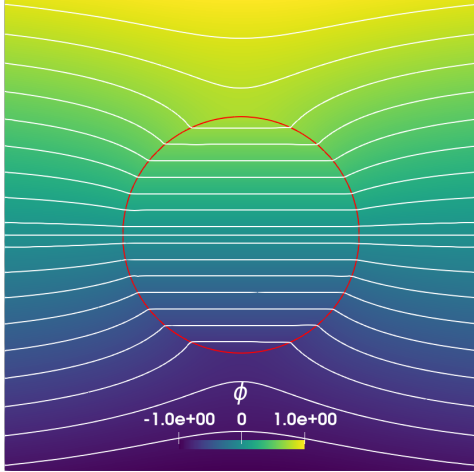
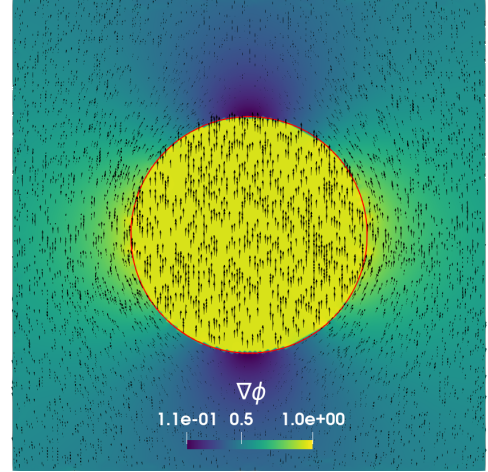


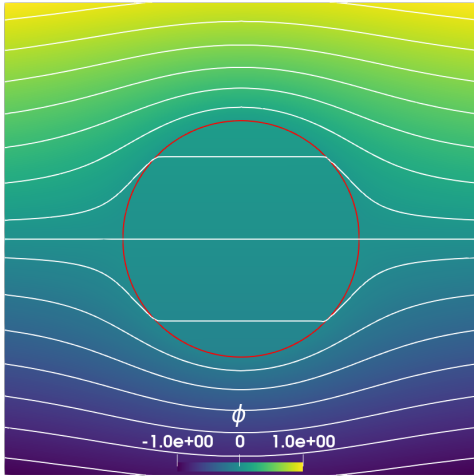
FIGURE 1 – Section 5.1 : illustration schématique du fonctionnement d'un analyseur basé sur le principe de Coulter [coulter\_means\_1953]. Un échantillon de sang est inséré dans une solution contenue dans un système de vases communicants (RBC suspension). Une différence de pression amène les cellules présentes dans l'échantillon à passer par un petit canal de mesure (Aperture) dans lequel un fort champ électrique est imposé par les 2 électrodes (Anode/Cathode). La perturbation temporaire de la tension relevée permet de mettre en place une procédure rapide de dénombrement de cellules.



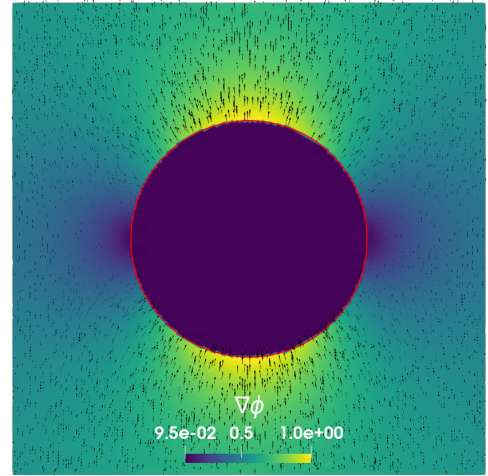
(a)  $\phi_h, (\sigma_{\text{int}}/\sigma_{\text{ext}}) = 0.1$



(b)  $\nabla_h \phi_h, (\sigma_{\text{int}}/\sigma_{\text{ext}}) = 0.1$



(c)  $\phi_h, (\sigma_{\text{int}}/\sigma_{\text{ext}}) = 10$



(d)  $\nabla_h \phi_h, (\sigma_{\text{int}}/\sigma_{\text{ext}}) = 10$

FIGURE 2 – Section 5.1 : approximation numérique d'un potentiel électrique solution de (1) obtenu en YALES2BIO, à travers la méthode GFM. Avec  $f = 0$ ,  $\Phi_\Gamma = 0$ ,  $J_\Gamma = 0$ , la solution est caractérisée par le signe de  $k = (\sigma_{\text{int}}/\sigma_{\text{ext}} - 1)$ . Sur la première ligne, la solution numérique  $\phi_h$  correspondante à  $\sigma_{\text{int}}/\sigma_{\text{ext}} = 0.1$ . Sur la deuxième, la solution pour  $\sigma_{\text{int}}/\sigma_{\text{ext}} = 10$ .

## 5.2 Un schéma Discrete De Rham pour un problème elliptique d'interface

### Motivation

On a repris le problème (1), et on a développé un schéma numérique basé sur des **maillages adaptés à l'interface**. Ce projet est motivé par la difficulté d'estimer les sauts de gradient que l'on observe avec les stratégies numériques implémentées dans YALES2BIO. Le schéma proposé est basé sur les principes de conception présentés en [di\_pietro\_arbitrary\_order\_2023] et rentre dans la catégorie des **méthodes polytopales**. Une des principales raisons pour choisir ce cadre est représentée par la flexibilité donnée par le support de maillages de polygones génériques pour des **problèmes présentant une frontière immergée**. Un maillage adapté peut être facilement généré en découpant un maillage de départ le long de l'interface (figure 3). La résolution de l'interface étant indépendante de celle du maillage en arrière-plan, le schéma est adapté à approcher la solution de problèmes dans lesquels la frontière est courbe, sans un ajout important de degrés de liberté dans le volume.

### Contexte

Pour définir le schéma, on considère, pour  $\bullet \in \{\text{int}, \text{ext}\}$  une partition polygonale  $\mathcal{T}_h^\bullet$  de  $\Omega^\bullet$ , ainsi que les ensembles  $\mathcal{E}_h^\bullet$  et  $\mathcal{V}_h^\bullet$  regroupant respectivement les arêtes et les sommets des éléments de  $\mathcal{T}_h$ . Pour un degré polynomial  $k \geq 0$  arbitraire, on définit les espaces

$$\underline{V}_{\bullet,h}^k := \left\{ v_h = ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h^\bullet}, (v_E)_{E \in \mathcal{E}_h^\bullet}, (v_V)_{V \in \mathcal{V}_h^\bullet}) : \begin{aligned} &v_T \in \mathcal{P}^{k-1}(T) \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h^\bullet, \\ &v_E \in \mathcal{P}^{k-1}(E) \text{ pour tout } E \in \mathcal{E}_h^\bullet, \\ &v_V \in \mathbb{R} \text{ pour tout } V \in \mathcal{V}_h^\bullet \end{aligned} \right\},$$

où  $\mathcal{P}^k(X)$  est l'espace des polynômes d'ordre jusqu'à  $k$  définis sur  $X$ . L'espace qu'on introduit pour la recherche de la solution discrète est

$$\underline{V}_h^k := \underline{V}_{\text{int},h}^k \times \underline{V}_{\text{ext},h}^k,$$

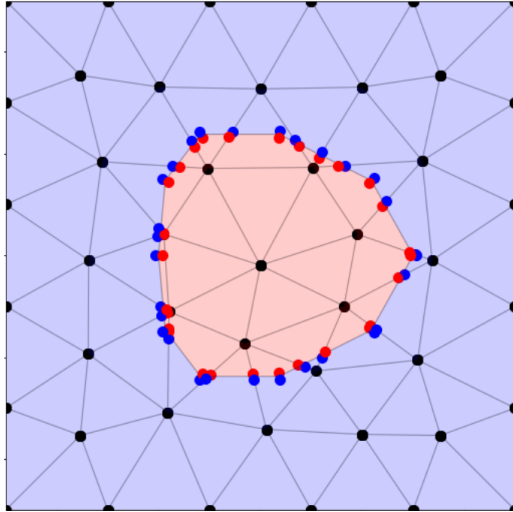
ainsi que le sous-espace  $\underline{V}_{h,0}^k$  avec valeurs nulles sur  $\partial\Omega$ . L'espace discret est caractérisé par des degrés de liberté hybrides, associés à des entités géométriques du maillage de dimension différente. Le redoublement des degrés de liberté à l'interface permet la représentation de solutions discontinues. Pour pouvoir définir au sens discret les opérateurs apparaissant dans la forme faible de (1), on introduit des reconstructions locales à chaque élément.

### Résultats

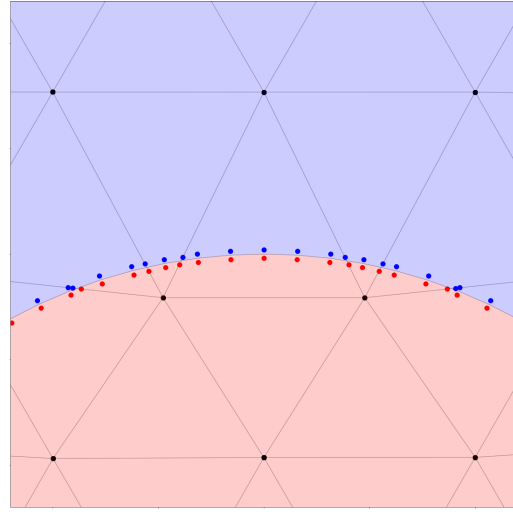
Pour cette méthode, nous avons présenté une **analyse de stabilité** et nous avons fourni une **estimation a priori de l'erreur** en fonction du diamètre des mailles et du degré polynomial choisi. En particulier, nous avons pu montrer que l'erreur de convergence dans une norme pénalisant les dérivées jusqu'à l'ordre 1 est contrôlée par un facteur  $h^{(k+1)}$ ,  $h$  étant le diamètre de  $\mathcal{T}_h$ , si la solution continue est suffisamment régulière. La stabilité du schéma est indépendante du ratio de conductivité. Le schéma a été adapté pour représenter l'évolution temporelle du potentiel transmembrane selon le modèle proposé en [seiwert\_instability\_2013]. Les résultats détaillés de ce module font l'objet de [di-pietro.mendez.spadotto:25] (<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.113920>).

### Prospectives

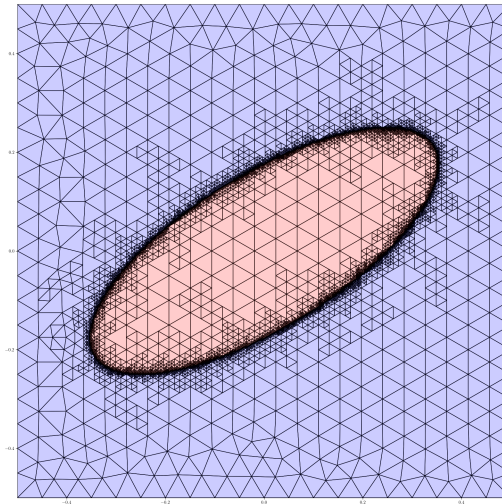
Il serait intéressant d'étudier comment le traitement simple des conditions de transmission et la possibilité de représenter fidèlement les sauts de la variable pourraient se généraliser. Des conditions de transmission à travers une interface immergée sont une caractéristique d'autres modèles, et ne se limitent pas à la description de potentiels électriques. Il serait intéressant d'évaluer comment la méthode pourrait s'adapter à la modélisation d'objets monodimensionnels tels que des fractures dans le terrain en géologie ou des cils en contexte biomédical. Une suite de ce projet est décrite dans la section 5.3, et elle est liée à un modèle d'interface mobile.



(a) Maillage polygonal obtenu en découpant un maillage simplicial le long d'une frontière immergée



(b) Détail d'une interface avec résolution fine par rapport au maillage en arrière-écran



(c) Raffinement non conforme des éléments proches de l'interface

FIGURE 3 – Section 5.2 ; exemple de maillages génériques supportés par la méthode Discrete De Rham. Dans le maillage généré, les données et la solution numérique ne peuvent présenter des sauts que à travers la frontière des éléments.

## 5.3 Un simulateur de capsules supportant maillages polygonaux

### Motivation

L'objectif est d'étendre le cadre discret polygonal introduit dans la section 5.2 à la simulation complète des globules rouges. Pour cela, on cherche à introduire un simulateur pour l'écoulement d'une capsule élastique mobile immergée dans un environnement fluide basé sur un maillage s'adaptant à l'interface à chaque itération temporelle.

### Contexte

Comme modèle de référence, on considère celui présenté en [breyiannisSimpleShearFlow2000]. Dans cette description 2D, la capsule est représentée comme une membrane flexible séparant deux phases fluides, et l'écoulement est décrit en termes des équations de Stokes. La vitesse et la pression sont déterminées comme la solution d'un **problème à valeurs au bord avec une condition de transmission à l'interface**. On note  $\Omega$  le domaine, et il s'agit de déterminer  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $p : \Omega_{\text{int}} \cup \Omega_{\text{ext}} \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\nabla \cdot (\mu(\nabla v + \nabla^T v) - p\mathcal{I}_d) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\bullet}, \bullet \in \{\text{int}, \text{ext}\}, \quad (2a)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\bullet}, \bullet \in \{\text{int}, \text{ext}\}, \quad (2b)$$

$$[v] = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2c)$$

$$[\sigma] \cdot n_{\Gamma} = t_{\Gamma} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2d)$$

$$\int_{\Omega} p = 0, \quad (2e)$$

$$v = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2f)$$

où  $\mu \in L^{\infty}(\Omega)$  représente un coefficient de viscosité cinématique discontinu à travers l'interface,  $t_{\Gamma} \in L^2(\Gamma, \mathbb{R}^2)$  représente une distribution de tension de membrane et  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^2)$  une valeur au bord. Pour résoudre numériquement le problème (2), on adapte un schéma **Hybride d'Ordre Supérieur (HHO)** présenté en [di\_pietro\_hybrid\_2020], et adapté pour intégrer le terme source  $t_{\Gamma}$ . L'inconnue vitesse est cherchée dans l'espace hybride

$$\underline{U}_h^k := \left\{ \underline{v}_h = ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (v_E)_{E \in \mathcal{E}_h}) : v_T \in \mathcal{P}^k(T, \mathbb{R}^2), v_E \in \mathcal{P}^k(E, \mathbb{R}^2) \right\},$$

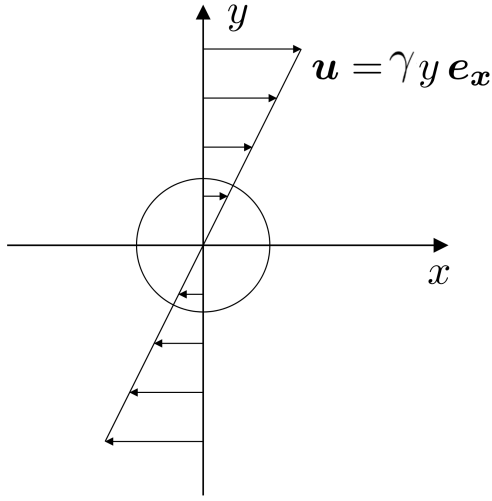
et la pression est discrétisée dans l'espace  $P_h^k := \{p \in \mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h) : \int_{\Omega} p = 0\}$ . Le choix est motivé par le fait que le schéma peut supporter les maillages adaptés et bénéficie de la possibilité de condenser statiquement les variables aux éléments pour réduire la taille du système linéaire associé. L'analyse de stabilité et les propriétés de convergence du schéma adapté restent inaltérées. En particulier, l'erreur dans une norme énergie pénalisant le gradient de vitesse converge comme  $h^{(k+1)}$ . Comme pour le schéma hybride introduit pour le problème (1), le design des opérateurs discrets est basé sur une procédure de reconstruction locale. Le solveur pour les équations de Navier-Stokes est couplé avec un schéma d'avancement explicite de la position des sommets de l'interface.

### Résultats

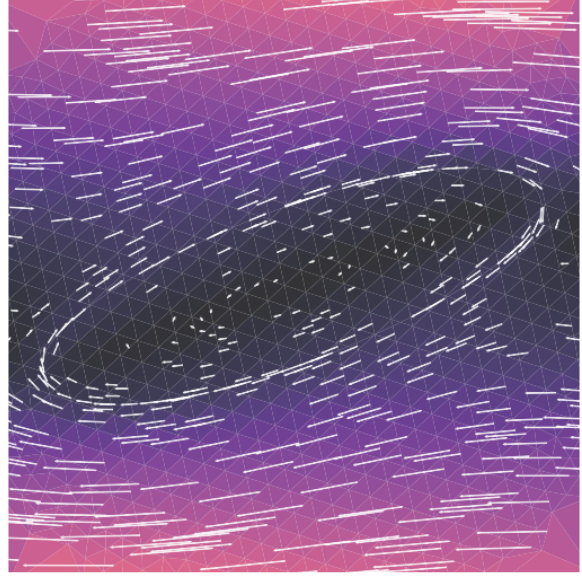
Le schéma a été testé sur des configurations d'écoulement de référence (figure 4). La simulation numérique de capsules basée sur le solveur HHO pour les équations fait l'objet d'un article en cours de rédaction.

### Prospectives

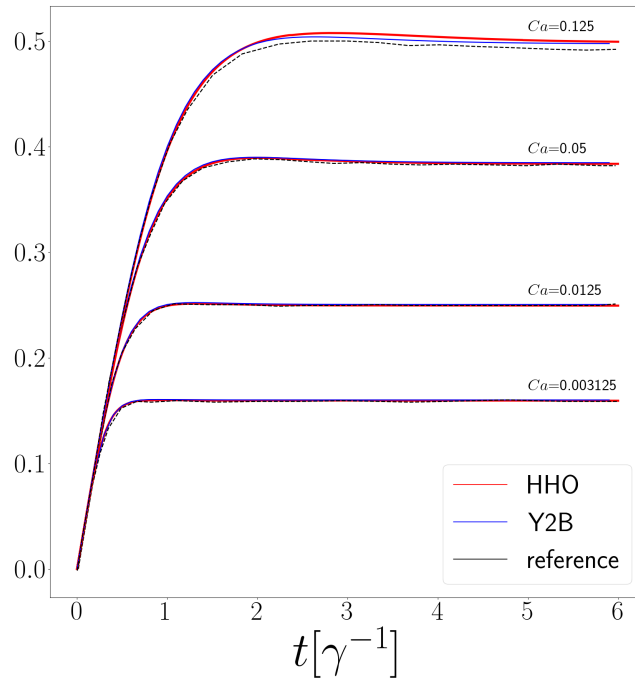
Pour ce projet, il serait intéressant de réaliser une comparaison avec les approches les plus diffusées pour traiter numériquement le couplage surface/écoulement. En particulier, avec la méthode Frontière Immergée, implémentée en YALES2BIO et la méthode Boundary Integral (voire [breyiannisSimpleShearFlow2000]), les deux références principales dans le domaine. Pour cela, il serait intéressant de pousser jusqu'à ses limites l'approche polytopale, en montrant sur des configurations adaptées les avantages offerts par la résolution indépendante de la membrane et la possibilité d'appliquer un raffinement local autour de l'interface. Cette direction poserait la question d'une implémentation optimisée et de discuter des possibles généralisations des algorithmes de découpage en dimension 3. Ce projet pourrait bénéficier du soutien d'un ingénieur de recherche.



(a) Schéma illustratif de la configuration considérée (depuis [mendezUnstructuredSolverSimulations2014]) : capsule circulaire déformée par un profil de vitesse  $\mathbf{u}$  avec taux de cisaillement  $\gamma$ .



(b) Déformation maximale de la membrane à l'équilibre et profil de vitesse autour de l'interface.



(c) Comparaison du taux de déformation de la capsule (ratio entre axe majeur et axe mineur) obtenu avec les trois méthodes : en pointillé noir la méthode Boundary Integral (référence), en rouge la méthode des Frontières Immersée (YALES2BIO), en bleu le solveur HHO. La comparaison est répétée pour différentes valeurs du nombre capillaire  $Ca$ , représentant le rapport entre les forces de rappel élastiques de la membrane et les forces visqueuses.

FIGURE 4 – Section 5.3 : la configuration de référence considérée est celle d'une capsule initialement au repos soumise à un cisaillement linéaire. Le résultat obtenu avec un simulateur basé sur un solveur HHO pour le problème (2) est comparé avec celui obtenu avec une méthode de type Boundary Integral [breyiannisSimpleShearFlow2000] et avec celui obtenu dans YALES2BIO avec une méthode des Frontières Immersée.

## 5.4 Schéma hybrides pour les systèmes de Friedrichs

### Motivation

Les systèmes de Friedrichs, introduits en [Friedrichs:58], sont une classe de systèmes d'EDP linéaires du premier ordre constituant un cadre commun pour traiter des **équations à caractère elliptique, hyperbolique ou mixte**. Considérant  $m \in \mathbb{N}$  et un domaine borné et polytopal  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , soient  $\mathcal{K} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{m \times m})$ , et, pour  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\mathcal{A}^i \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{m \times m}) \cap C^{0, \frac{1}{2}}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ , avec  $\mathcal{A}^H = \mathcal{A}$  presque partout en  $\Omega$ , tels que pour un quelque  $\tau_\nu > 0$ ,

$$\mathcal{K} + \mathcal{K}^H - \sum_{i=1}^d \partial_i \mathcal{A}^i \geq 2\tau_\nu$$

presque partout en  $\Omega$ . Soit  $\mathcal{N} \in L^\infty(\partial\Omega, \mathbb{C}^{m \times m})$  tel que  $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^d \mathcal{A}^i n_i$ , où  $n_i$  est la  $i$ -ème composante cartésienne de la normale à  $\partial\Omega$  sortante. Avec  $f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^m)$  et  $\mathcal{M} \in L^\infty(\partial\Omega, \mathbb{C}^{m \times m})$ , on cherche à déterminer  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$  satisfaisant

$$\mathcal{K}u + \sum_{i=1}^d \mathcal{A}^i \partial_i u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (3)$$

$$(\mathcal{M} - \mathcal{N})u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4)$$

Parmi les exemples de systèmes d'équations qui rentrent dans le cadre (3) figurent les **équations de Maxwell en régime *time harmonic***, et l'**équation de diffusion-advection-réaction en forme mixte** [Ern.Guermond:06] avec des conditions au bord de type Dirichlet, Neumann ou mixtes. Une preuve d'existence et d'unicité de solutions faibles a été fournie en [Ern.Guermond:06]. Dans le même travail, on introduit un schéma de type Discontinuous Galerkin pour un système de Friedrichs générique. Le but du projet est l'**hybridisation** de ce schéma, permettant une réduction du nombre total de degrés de liberté grâce à une procédure de **condensation statique** qui élimine les inconnues aux éléments.

### Résultats

Nous avons présenté un nouveau schéma numérique basé sur l'espace d'inconnues hybride

$$\underline{U}_h^k := \{v_h = ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) : v_Y \in \mathcal{P}^k(Y; \mathbb{C}^m) \text{ for all } Y \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h\},$$

où  $\mathcal{T}_h$  est un ensemble de polytopes constituant un maillage de  $\Omega$ ,  $\mathcal{F}_h$  est l'ensemble de toutes les faces des polytopes en  $\mathcal{T}_h$  et  $k$  est un degré polynomial arbitraire. L'**inf-sup stabilité** de la méthode est garantie grâce à un terme consistant de stabilisation inspiré à une pénalisation *upwind* introduite en [Ern.Guermond:06]. La convergence de la solution numérique à la solution exacte avec un **ordre**  $h^{(k+\frac{1}{2})}$  est prouvée dans une norme qui inclut la **norme  $L^2$  de la dérivée directionnelle** et les constantes apparaissant dans l'estimation d'erreur sont explicitées par rapport aux coefficients de l'équation. La méthode a été testée numériquement pour deux exemples de systèmes de Friedrichs en dimension 3 : une équation de diffusion-advection-réaction à variable scalaire et une équation à variable vectorielle, apparaissant en magnétohydrodynamique pour décrire le processus de diffusion/advection du champ magnétique. Ce travail fait l'objet de [Di-Pietro.Spadotto:26](<https://arxiv.org/abs/2602.10890>).

### Prospectives

Un des objectifs du post-doctorat actuellement en cours est la spécialisation au cas des **systèmes à deux blocs**, dans lesquels la variable est décomposée dans un couple potentiel/flux. Cela s'applique en particulier au cas des équations d'ordre 2 écrites en forme mixte. Avec des hypothèses standard sur la structure de la matrice  $\mathcal{K}$  il est possible d'écrire un schéma dans lequel la variable flux est discrétisée dans un espace sans polynômes de face, permettant de l'éliminer statiquement. Du point de vue de l'analyse, il serait surtout intéressant d'identifier la superconvergence de la méthode sous des hypothèses sur le régime local, en introduisant des nombres sans dimension cellule par cellule qui décrivent la grandeur relative des termes de l'équation. D'autres débouchées directes seraient la discrétisation en temps d'un système hyperbolique ainsi que l'intégration de termes non linéaires.

## 6 Pièces Annexes

### 6.1 Rapport de pre-soutenance de Mme Lisl Weynans



---

Rapport sur le mémoire de thèse présenté par Aurelio Spadotto pour l'obtention du grade de docteur de l'Université de Montpellier en Mathématiques et Modélisation

"Numerical simulation of red blood cell electrodeformation"

---

La thèse rédigée par Monsieur Aurelio Spadotto est un travail de recherche qui porte sur la simulation numérique de l'électrodéformation de globules rouges. Plus précisément, il s'agit d'étudier des méthodes numériques pour simuler les effets d'un champ électrique sur la déformation de la membrane d'une interface souple séparant deux phases fluides aux propriétés électriques contrastées. Une des applications visées par ce travail concerne le fonctionnement de dispositifs appelés cytomètres servant à caractériser des particules en suspension dans un fluide, comme par exemple des globules rouges.

Le mémoire comprend deux grandes parties, chacune dédiée au développement d'un certain type de méthode numérique pour résoudre le problème électro-hydrodynamique de la déformation d'une membrane : une approche par maillage non-adapté, et une approche par maillage adapté. Je détaille ci-après rapidement les contenus de ces parties, divisées en chapitres, mais avant cela, je tiens à souligner la complexité particulièrement élevée du problème étudié, tant en terme de modélisation qu'en terme de simulation numérique. En effet l'interaction entre la membrane élastique et le fluide résulte à la fois d'effets hydrodynamiques et électriques, avec la nécessité pour être prédictif d'obtenir des résultats très précis sur et au voisinage de la membrane.

Le premier chapitre est une introduction à la problématique physique, c'est-à-dire les suspensions de capsules déformables telles que les globules rouges, notamment dans le contexte de cytomètres. Est également présenté le logiciel YALES2BIO, développé depuis de nombreuses années, qui permet à l'heure actuelle de simuler de telles suspensions, mais sans prendre en compte l'effet d'un champ électrique sur la déformation des capsules (ou globules rouges). La problématique générale de la thèse est alors présentée.

Le deuxième chapitre présente une revue sur la modélisation des globules rouges, la description des différentes déformations d'une membrane élastique ainsi que les principes de modélisation de l'interaction fluide-structure dans le cas d'une cellule, c'est à dire d'une membrane séparant deux fluides. Le modèle électrohydrodynamique (Leaky Dielectric Model) retenu dans le cadre de cette thèse, décrivant les effets d'un champ électrique sur la déformation de la membrane, y est aussi présenté.

Le troisième chapitre présente les méthodes numériques choisies pour résoudre le problème d'électrodéformation dans le logiciel YALES2BIO, aussi bien pour la partie pré-existante à la thèse, c'est-à-dire l'interaction purement hydrodynamique fluides-membrane, que la partie électrodynamique, qui constitue une des principales contributions de cette thèse. Les simulations dans

YALES2BIO reposent sur l'utilisation de deux types de structures géométriques : la membrane, décrite comme un maillage lagrangien, et le volume dans lequel est immergée cette membrane, constitué d'un maillage eulérien. Les équations de Navier-Stokes sont résolues avec une méthode de prédiction-corréction basée sur des volumes finis pour la discrétisation spatiale. L'interaction fluide-membrane est calculée avec une méthode de type IBM (Immersed Boundary Method). La résolution des effets électriques et de la force associée se fait dans un module complémentaire à YALES2BIO : le module ESS. Il s'agit de résoudre un problème elliptique présentant des discontinuités au travers de l'interface que constitue la membrane, et pour cela c'est la méthode Ghost-Fluid, dans sa version pour volumes finis, qui est choisie. On présente parfois les méthodes de types frontières immergées sur maillages non-adaptés comme des méthodes à la discrétisation relativement plus "simple" que leurs équivalents sur maillages adaptés, mais dans le cas de phénomènes complexes comme celui considéré ici, le développement d'une méthode capable de simuler l'ensemble des interactions fait nécessairement appel à des techniques sophistiquées, notamment pour la communication entre les structures géométriques, et constitue une belle réalisation scientifique.

Dans le quatrième chapitre est présentée une série de tests numériques en deux et trois dimensions ayant pour but la validation et l'étude du comportement numérique de la méthode présentée dans le chapitre précédent. Le premier test concerne la partie purement électrique et permet de comparer la solution numérique à une solution exacte. Des tests de convergence sont fournis en annexe mais à mon sens ils font véritablement partie de ce chapitre. Les tests suivants concernent la déformation de capsules soumises à un champ électrique, au repos puis dans un écoulement. Les configurations testées sont nombreuses et intéressantes. Dans la conclusion de ce chapitre, l'auteur relève que si la méthode numérique permet de réaliser des simulations des phénomènes considérés, des problèmes de robustesse numérique apparaissent en dimension trois. Cela motive le travail réalisé dans les deux chapitres suivants, où un autre type de méthode numérique sera investigué.

Le chapitre cinq présente donc les premiers pas du développement d'une alternative sur maillage adapté à la méthode précédente : un schéma de Rham discret, basé sur les principes des méthodes HHO (Hybrid High-Order) qui permet d'utiliser des maillages polytopaux. Ce schéma permet de résoudre un problème elliptique avec discontinuités aux travers d'une interface, et son application au modèle précédemment évoqué pour l'électrodéformation (Leaky Dielectric Model). Une des contributions du travail d'Aurelio Spadotto, dans ce chapitre, est d'avoir pris en compte les conditions de transmissions au travers de l'interface dans le formalisme des méthodes de Rham discrètes. Le chapitre comprend une description de la construction du schéma numérique, des tests numériques, une preuve de stabilité et une estimation de convergence. Comme je ne suis pas spécialiste de ce type de méthodes, deux points m'ont paru particulièrement intéressants au regard du paysage des méthodes de type frontières immergées classiques : le fait que l'estimation d'erreur ne dépende pas du rapport entre les conductivités dans chaque milieu, et le fait que ce type de méthode autorise à se servir d'un maillage non-adapté et à redécouper les mailles contenant l'interface sans avoir de contrainte particulière sur la forme des éléments qui en résulte.

Le dernier chapitre est une courte introduction à la simulation avec un schéma de Rham discret de l'interaction entre une capsule et un fluide décrit par les équations de Stokes, sans que des effets électriques ne soit pris en compte. Des résultats préliminaires sont présentés, notamment le calcul de l'évolution de la déformation d'une capsule dans un écoulement cisailé, avec une comparaison qualitative entre les résultats obtenus avec ce schéma de Rham discret et les résultats obtenus avec le logiciel YALES2BIO.

Ce manuscrit de thèse représente un travail très complet d'analyse numérique et de calcul scientifique appliqué à un problème complexe de couplage électro-dynamique. Le fait que deux approches numériques très poussées mais complètement différentes aient été investiguées est particulièrement notable, et montre qu'Aurelio Spadotto maîtrise un grand nombre de techniques numériques. En lisant le manuscrit, j'aurais apprécié un peu plus de discussions et de commentaires sur les résultats numériques, par exemple les résultats des études de convergence, ainsi que sur la comparaison entre les deux méthodes, puisqu'il est rarement possible de pouvoir les comparer aussi directement que dans le cadre de cette thèse. Ce sont néanmoins des remarques minimes en regard de la qualité et de la quantité du travail accompli.

Pour ces raisons je donne un avis favorable et sans réserves à la soutenance de la thèse de M. Aurelio Spadotto.

Lisl Weynans,  
Institut de Mathématiques de Bordeaux,  
Cours de la Libération, 33405 Talence, France  
lisl.weynans@math.u-bordeaux.fr

Talence, le 10/06/2025



## 6.2 Rapport de presoutenance de Mr Alexei Lozinski



Alexei LOZINSKI  
Professor of Applied Mathematics  
Laboratoire de Mathématiques de Besançon  
Université Marie et Louis Pasteur

Phone : 03 81 66 63 16

Email : alexei.lozinski@univ-fcomte.fr

---

Besançon, September 9th, 2019

### Report on the PhD Thesis by Aurelio Spadotto

The manuscript by Aurelio Spadotto is a very interesting contribution to the field of numerical simulations of red blood cells in flow, in particular when they are subject to an electric field. The common theme uniting all the developments in the thesis, in mathematical terms, is the numerical approximation of boundary-value problems for the partial difference equations in the presence of internal interfaces, over which the solution (or its derivatives) can be discontinuous. These interfaces can evolve in time and their evolution can be a part of the problem. This theme comes up in two physical settings : 1) the fluid-structure interaction problem with the structure being the elastic membrane of a red blood cell, separating the fluid inside the cell from the ambient one ; 2) the problem for the electric potential, when the electric field is applied to a red blood cell, leading to accumulation of the charge near its membrane, described via a jump of the potential near this surface. Two classes of numerical methods are applied to the two physical problems above : 1) low-order finite volume methods on a fixed grid, not fitted to the interface ; 2) finite-element-type methods on polygonal grids matching the interface : the Discrete De Rham scheme and the Hybrid High-Order (HHO) method.

The thesis consists of two distinctive parts. The first one, i.e. Chapters 2-4, deals with the complete set of governing equations and the numerical methods of the first class mentioned above : finite volumes on a fixed grid, as implemented in YALES2BIO solver (a numerical software with massively parallel capabilities, implementing high order finite volumes schemes in complex geometries). The governing equations include those for fluid-structure interaction for the incompressible fluid modeled by Navier-Stokes equations and the thin structure modeled as an interface between two fluids (Section 2.3) ; a hyperelastic model for the structure (the membrane, Section 2.2) ; and the Leaky Dielectric Model for the electric forces (Section 2.4). This shows already the complexity of physical phenomena considered in the thesis. Given the diversity of these models, one cannot go into too much detail of each governing equation. The exposition is necessarily concise. I would appreciate however some more hints to the derivation of these equations, starting from the fundamental principles. As an example, the fluid-structure model could be presented through a variational (weak)

formulation involving well-defined volume and surface integrals. Instead of this, the Author opts for a presentation in the language of delta-functions à la Peskin whose precise mathematical or physical meaning is not always clear.

The implementation of the discretization schemes the above mentioned equations, performed using the YALES2BIO solver, is presented in Chapter 3. The Navier-Stokes equations are discretized by lowest-order finite volumes on a possibly unstructured grid, not fitted to the interface (the membrane). The membrane is represented by a triangulated surface and its displacement is approximated by piecewise linear polynomials on this surface mesh. The interaction between the membrane and the fluid on both sides of it is approximated by replacing the delta functions (supported at a point) by regularized delta functions (supported on the balls of radius  $\sim h$  the mesh size). This allows one to take into account the discontinuity in the normal derivatives of the velocity across the interface. The most innovative contribution in this part of the thesis is the adaptation of this methodology to the Leaky Dielectric Model for the electric potential. The additional difficulty here is that the potential itself (rather than its normal derivative) is discontinuous across the interface. One cannot thus approximate it by the finite volumes on a unfitted grid in the same way as described above for the fluid velocity. The author bypasses this difficulty by introducing artificial extensions of the potential on both sides of the interface, and thus doubling the discrete unknowns near the interface. The quality of the resulting method is attested by numerical experiments reported in Chapter 4, on the benchmarks of increasing complexity, incrementally introducing multi-physics behavior. Some mesh-convergence studies are also reported in Appendix A. This part of the thesis is the result of a huge amount of work on conceiving, implementing, and testing very complicated numerical methods, important for real-life applications. One cannot expect a full theoretical analysis of all these methods. I would appreciate however more hints at the proofs of consistency with the governing equations.

The second part of the thesis, i.e. Chapters 5&6, is very different in spirit from the first part. The numerical methods developed here are fully analyzed and justified theoretically, while applying them to the governing equations which represent the most important bricks of the full multi-physics model considered in the first part. In particular, the electrostatic transmission problem across a surface with a prescribed jump in the electric potential (the Leaky Dielectric Model) is considered in Chapter 5. A novel numerical method, based on meshes with polygonal (polytopal) elements of general form, is introduced there. This allows one to naturally take into account the interface, by cutting the background fixed mesh with a polygonal line fitted to the interface. The idea of the method, referred to as the Discrete De Rham scheme, is to look for the approximation having the Degrees of Freedom (DOFs) in the form of polynomials (of possibly high degree) attributed to both the cells and the edges of the mesh, plus scalar DOFs attributed to the vertices. The approximate gradient of the solution (or the approximate solution itself) are recovered from these DOFs by mimicking well chosen integration by parts-like formulas on the mesh cells and edges. These approximations are then substituted in the weak formulation of the governing equations, leading, after the addition of an appropriate stabilization, to a consistent and stable scheme, whose optimal convergence can be proven at any order of the underlying polynomials. At the lowest order (which is the only case, which is actually implemented in the thesis), the DOFs of the method are just the values at the vertices, giving an economical and optimally convergent method on general computational grids. The method is also proven robust with respect to the physical coefficients (the permittivity of the medium for example) that can vary abruptly across the interface. All these nice properties are illustrated by numerical experiments.

Chapter 6 outlines a possible future direction for the overall modeling framework : the extension of the techniques developed in Chapter 5 to a full flow-structure interaction solver on polygonal meshes. The method chosen here is HHO, which is close to the Discrete De Rham scheme, but more

studied already in the existant literature.

The thesis is concluded by a short Chapter 7 that synthesizes the findings of both parts and outlines a clear research plan for future work.

In summary, Aurelio Spadotto's thesis is an impressive contribution to the numerical modeling of multiphysics phenomena involving evolving internal interfaces, with applications in the dynamics of red blood cells. The manuscript contains a lot of original and interesting results on innovative numerical methods and their implementation.

**This manuscript by Aurelio Spadotto is certainty acceptable for a PhD defense.**



\*\*\*\*\*

laboratoire de mathématiques de besançon **(Lm<sup>B</sup>)** UMLP • CNRS • UMR 6623

## 6.3 Rapport de soutenance



DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER  
RAPPORT DE SOUTENANCE



*Le rapport doit être rédigé en français.  
En complément, une traduction en anglais peut figurer sur le même rapport.  
Dans le cadre d'une cotutelle, le rapport peut être rédigé uniquement en anglais.*

Nom et prénom du doctorant : SPADOTTO Aurelio

Titre de la thèse : Simulation numérique de l'électro-déformation de cellules sanguines. Application au diagnostic médical

École Doctorale : I2S - Information, Structures, Systèmes

Date de la soutenance : 1 juillet 2025

Président du jury : VINCENT MOUREAU (COMPLÉTER)

Membres du jury :

Nom	Signature	Nom	Signature
Simon MENDEZ		List WEYNANS	PROCURATION
Alexei LOZINSKI		Daniele DI PIETRO	
Jérôme DRONIOU		Vincent MOUREAU	

*Les membres du jury attestent avoir pris connaissance de l'intégralité du rapport.*

*Le(s) Directeur(s) de thèse atteste(nt) ne pas avoir pris part à la décision.*

*Si le rapport comporte plusieurs pages ou s'il est rédigé sur un document distinct, il devra être paraphé sur chaque page et signé par le Président du jury.*

Aurelio Spadotto a fait une présentation très claire et didactique de son travail de thèse sur la simulation de l'électrodéformation des globules rouges qui a permis au jury d'avoir un éclairage complémentaire au manuscrit sur son travail de thèse. Il a su proposer une présentation synthétique de ses résultats principaux mettant en lumière des détails techniques bien choisis. Ce travail consistait au développement d'un modèle d'électrodéformation basé sur les méthodes de l'état de l'art dans la plateforme logicielle YALES2BIO. La validation extensive de ce modèle a montré des limites importantes des méthodes de frontières immergées, ce qui l'a mené au développement de schémas numériques originaux pour les maillages polygonaux. Ce travail est donc par essence multi-disciplinaire à la croisée de la physique, de la modélisation et des mathématiques appliquées avec des applications visées bien identifiées.

Il a répondu aux nombreuses questions qui portaient sur l'ensemble des aspects tant théoriques, numériques et de modélisation montrant ainsi son excellente maîtrise de toutes les notions abordées.

Pour toutes ces raisons, le jury décerne à Aurelio Spadotto le grade de docteur de l'Université de Montpellier en Mathématiques et Modélisation.

## 6.4 Attestation de Réussite au diplôme



Université de Montpellier

### ATTESTATION DE REUSSITE AU DIPLOME

Le Vice-Président de la Recherche atteste que

**le Doctorat en Mathématiques et Modélisation**  
a été décerné à

**Monsieur AURELIO EDOARDO SPADOTTO**  
né le 9 juillet 1997 à MILAN (ITALIE)

au titre de l'année universitaire 2024/2025

Titre des travaux : Simulation numérique de l' électro-déformation de cellules sanguines. Application au diagnostic médical

Date de soutenance : 1 juillet 2025

Jury :  
M. VINCENT MOUREAU, Président du jury, Directeur de recherche  
M. JÉRÔME DRONIOU, Membre du jury, Directeur de recherche  
M. DANIELE DI PIETRO, Co-Directeur de thèse, Professeur des universités  
M. ALEXEI LOZINSKI, Rapporteur, Professeur des universités  
M. SIMON MENDEZ, Directeur de Thèse, Chargé de recherche  
Mme LISL WEYNANS, Rapporteur, Professeur des universités

Ecole doctorale : Information, structures, systèmes

Fait à Montpellier, le 9 juillet 2025

Pour le Président de l'Université de Montpellier  
et par délégation,

  
Jacques MERCIER  
Le Vice-Président de la Recherche

Jacques Mercier



N° étudiant : 22120324